

EXPRESII ANALITICE PENTRU COEFICIENȚII DE ÎNMAGAZINARE AI UNUI SOL STRATIFICAT

Esmeralda CHIORESCU¹,

Șt. POPESCU²

¹Universitatea de Științe Agricole și Medicină Veterinară "Ion Ionescu de la Brad", Iași
e-mail:esmeralda_chiorescu@yahoo.com

²Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași
e-mail:popescustefani@yahoo.com

The paper is defining the average and local soil storage coefficients, for a layered soil, with relatively shallow water table. Then, by means of an adequate law for the suction's distribution on soil's level and the recommended in [1] parametrical models for the moisture retention curve of soil, are to be determined the analytical equations for these storage coefficients.

Theoretical results are to be applied for a case study, so being evaluated and the errors which are conducted in the use of proposed formulae for the storage coefficients.

Key words: layered soil, storage coefficients, analytical equations

Coeficienții de înmagazinare ai solului sunt utilizați cu precădere în modelarea matematică a drenării unui profil de sol. În literatura de specialitate [1] și [2] sunt definiți și evaluați coeficientul de înmagazinare mediu, $\bar{\mu}$, și/sau coeficientul de înmagazinare local, μ^* , dar numai pentru un strat de sol omogen.

În prezenta lucrare ne propunem să deducem expresii analitice pentru coeficienții de înmagazinare $\bar{\mu}$ și μ^* în cazul unui sol structurat pe N , ($N \geq 2$), orizonturi, delimitate de planurile orizontale (Fig. 1).

$$Z = \zeta_k, (k=1, \dots, N), \text{ cu } \zeta_k < \zeta_{k+1} \text{ pentru orice } k=1, \dots, N, \quad (1)$$

unde $\zeta_1 = Z_1 = 0$ reprezintă suprafața terenului, iar ζ_{N+1} - suprafața rocii mame.

Pentru un sol structurat pe N orizonturi, sunt acceptate următoarele ipoteze simplificatoare: 1°- întreg profilul de sol se află în zona franjului capilar; 2°- echilibrul hidrodinamic – atât în starea inițială (la adâncimea Z^*), cât și în starea finală (la adâncimea $Z^* + \Delta Z$, cu $\Delta Z > 0$); 3°- înălțimea piezometrică a aerului din fiecare orizont k este constantă, ($\psi_{a,k} = \psi_a$, pentru $k = 1, \dots, N$).

MATERIAL ȘI METODĂ

Pentru fiecare orizont de sol k , asimilat mediu poros, omogen și nesaturat, s-a considerat ecuația constitutivă sucțiune-umiditate sub forma:

$$\theta_w = \theta_{w,k}(\psi), \quad (k=1, \dots, N), \quad (2)$$

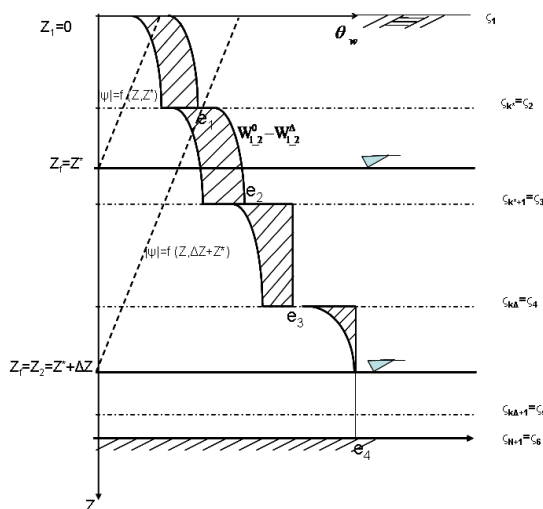


Figura 1 Variația sucțiunii și umidității într-un sol stratificat, la modificarea nivelului pânzei freatice

Pentru fiecare orizont de sol k , asimilat mediu poros, omogen și nesaturat, s-a considerat ecuația constitutivă sucțiune-umiditate sub forma:

$$\theta_w = \theta_{w,k}(\psi), \quad (k=1, \dots, N), \quad (3)$$

unde: θ_w este umiditatea volumetrică, [1]; ψ = înălțimea piezometrică (pentru $\psi \leq 0$, $|\psi|$ reprezintă înălțimea vacuumetrică sau sucțiunea), [L].

În *modelele parametrice uzuale* [1], ecuațiile constitutive (2) sunt exprimate cu ajutorul noțiunii de grad de saturație efectiv, $S_{w,k}^e$, definit astfel:

$$S_{w,k}^e = \frac{\theta_w - \theta_{w,k}^r}{\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r}, \quad (k=1, \dots, N), \quad (4)$$

unde: $\theta_{w,k}^s$ este umiditatea maximă ($\theta_{w,k}^s = e_k$, cu e_k indicele golurilor) și $\theta_{w,k}^r$ - umiditatea reziduală.

Dependența gradului de saturație efectiv $S_{w,k}^e$ de înălțimea piezometrică a apei din porii solului, ψ , este redată prin relații empirice, dependente de tipul modelului parametric adoptat:

a) pentru modelul *van Genuchten-Mualem*;

$$S_{w,k}^e(\psi) = \begin{cases} \left[1 + (A_k |\psi - \psi_a|)^{nk} \right]^{-mk} & \text{pentru } \psi < \psi_a, \\ 1 & \text{pentru } \psi \geq \psi_a \end{cases} \quad (5-a)$$

unde $mk=m_k$ și $nk=n_k$, [1], sunt exponenții și A_k , $[L^{-nk}]$, coeficientul modelului;

b) pentru modelul exponențial (propus de autori),

$$S_{w,k}^e(\psi) = \begin{cases} E_k e^{\alpha k(\psi - \psi_a)}, & \text{pentru } \psi < \psi_a, \\ 1 & \text{pentru } \psi \geq \psi_a \end{cases} \quad (5-b)$$

unde $\alpha k = \alpha_k$, $[L^{-1}]$, este numărul sorptiv, iar E_k , [-], coeficientul modelului.

Explicitând din relațiile (3) umiditatea θ_w , rezultă următoarea formă pentru ecuațiile constitutive (4):

$$\theta_w(\psi) = \begin{cases} \theta_{w,k}^r + S_{w,k}^e(\psi)(\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r), & \text{pentru } \psi < \psi_a, \quad (k=1, \dots, N). \\ \theta_{w,k}^s, & \text{pentru } \psi \geq \psi_a \end{cases} \quad (6)$$

Distribuția înălțimii piezometrice ψ pe domeniul $[Z_1, Z_2]$ depinde de adâncimea sub nivelul terenului, Z_f , la care se află pânza freatică; în condițiile de echilibru hidrodynamic (ipoteza 2^o), s-a dedus următoarea lege:

$$\psi = Z - Z_f + \psi_a, \text{ pentru } Z \in [Z_1, Z_2]. \quad (7)$$

Dacă este satisfăcută dubla inegalitate

$$\zeta_{kf} < Z_f \leq \zeta_{kf+1}, \quad (8)$$

nivelul liber al pânzei freatice este poziționat în orizontul $kf = k^f$, cu $k^f \in \{k^*, k^\Delta\}$.

Când pânza freatică se află la adâncimea $Z_f = Z^*$, $k^f = k^* = k^*$, iar din relația (7) s-au dedus:

$$\begin{aligned} \psi - \psi_a &= \begin{cases} Z - Z^* \leq 0, & \text{pentru } Z \in [0, Z^*] \\ Z - Z^* \geq 0, & \text{pentru } Z \in [Z^*, Z^* + \Delta Z] \end{cases} \text{ și} \\ |\psi - \psi_a| &= \begin{cases} Z^* - Z, & \text{pentru } Z \in [0, Z^*] \\ Z - Z^*, & \text{pentru } Z \in [Z^*, Z^* + \Delta Z] \end{cases}. \end{aligned} \quad (9)$$

În mod similar, când pânza freatică se află la adâncimea $Z_f = Z^* + \Delta Z$, $k^f = k^\Delta = k^\Delta$, iar din relația (7) au rezultat:

$$\begin{aligned} \psi - \psi_a &= Z - (Z^* + \Delta Z) \leq 0 \text{ și} \\ |\psi - \psi_a| &= Z^* + \Delta Z - Z, \text{ pentru } Z \in [0, Z^* + \Delta Z]. \end{aligned} \quad (10)$$

Legile de distribuție a umidității pe profilul solului, pe domeniul $[Z_1, Z_2]$, de asemenea depind de poziția nivelului liber Z_f a pânzei freatice, $Z_f \in \{Z^*, Z^* + \Delta Z\}$.

Pentru $Z_f = Z^*$, considerând expresiile (5) și (9), din relația (6) au rezultat:

a) pentru modelul *van Genuchten-Mualem*,

$$\theta_w^*(Z) = \begin{cases} \theta_{w,k}^r + (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) \left[1 + (A_k (Z^* - Z))^{nk} \right]^{-mk}, \\ \text{pentru } 1 \leq k \leq k^* \text{ si } Z \in [\zeta_k, \min\{\zeta_{k+1}, Z^*\}]; \\ \theta_{w,k-1}^s, \text{ pentru } k^* + 1 \leq k \leq k^\Delta + 1 \text{ si } Z \in [\max\{\zeta_{k-1}, Z^*\}, \min\{\zeta_k, Z^* + \Delta Z\}] \end{cases} \quad (11-a)$$

b) pentru modelul *exponențial*,

$$\theta_w^*(Z) = \begin{cases} \theta_{w,k}^r + (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) E_k e^{\alpha k (Z - Z^*)}, \\ \text{pentru } 1 \leq k \leq k^* \text{ si } Z \in [\zeta_k, \min\{\zeta_{k+1}, Z^*\}]; \\ \theta_{w,k-1}^s, \text{ pentru } k^* + 1 \leq k \leq k^\Delta + 1 \text{ si } Z \in [\max\{\zeta_{k-1}, Z^*\}, \min\{\zeta_k, Z^* + \Delta Z\}] \end{cases} \quad (11-b)$$

Pentru $Z_l = Z^* + \Delta Z$, considerând expresiile (5) și (10), din relația (6) au rezultat:

a) pentru modelul *van Genuchten-Mualem*,

$$\theta_w^\Delta(Z) = \theta_{w,k}^r + (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) \left[1 + (A_k (Z^* + \Delta Z - Z))^{nk} \right]^{-mk}, \quad (12-a)$$

pentru $1 \leq k \leq k^\Delta$ si $Z \in [\zeta_k, \min\{\zeta_{k+1}, Z^* + \Delta Z\}]$;

b) pentru modelul *exponențial*,

$$\theta_w^\Delta(Z) = \theta_{w,k}^r + (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) E_k e^{\alpha k (Z - Z^* - \Delta Z)}, \quad (12-b)$$

pentru $1 \leq k \leq k^\Delta$ si $Z \in [\zeta_k, \min\{\zeta_{k+1}, Z^* + \Delta Z\}]$.

Rezerva de apă stocată pe profilul solului între adâncimile Z_1 și Z_2 , cu $0 \leq Z_1 < Z_2$, este evaluată cu integrala:

$$W_{1-2} = \int_{Z_1}^{Z_2} \theta_w(Z) dZ. \quad (13)$$

Când pânza freatică se află la adâncimea Z , distribuția umidității pe profilul solului pe adâncimea $[Z_1 = 0, Z_2 = Z^* + \Delta Z]$ este reprezentată de relațiile (11), astfel încât rezerva de apă stocată, dată de relația (13), are următoarea formă:

a) pentru modelul *van Genuchten-Mualem*,

$$W_{1-2}^0 = \sum_{k=1}^{k^*-1} \theta_{w,k}^r (\zeta_{k+1} - \zeta_k) + \sum_{k=1}^{k^*-1} (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \left[1 + (A_k (Z - Z^*))^{nk} \right]^{-mk} dZ + \quad (14-a)$$

$$\theta_{w,k^*}^r (Z^* - \zeta_{k^*}) + (\theta_{w,k^*}^s - \theta_{w,k^*}^r) \int_{\zeta_{k^*}}^{Z^*} \left[1 + (A_{k^*} (Z^* - Z))^{nk^*} \right]^{-mk^*} dZ +$$

$$\theta_{w,k^*}^s (\zeta_{k^*+1} - Z^*) + \sum_{k=k^*+2}^{k^\Delta} \theta_{w,k-1}^s (\zeta_k - \zeta_{k-1}) + \theta_{w,k^\Delta}^s (Z^* + \Delta Z - \zeta_{k^\Delta})$$

b) pentru modelul *exponențial*,

$$W_{1-2}^0 = \sum_{k=1}^{k^*-1} \theta_{w,k}^r (\zeta_{k+1} - \zeta_k) + \sum_{k=1}^{k^*-1} (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) \frac{E_k}{\alpha k} \left[e^{\alpha k (\zeta_{k+1} - Z^*)} - e^{\alpha k (\zeta_k - Z^*)} \right] + \quad (14-b)$$

$$\theta_{w,k^*}^r (Z^* - \zeta_{k^*}) + (\theta_{w,k^*}^s - \theta_{w,k^*}^r) \frac{E_{k^*}}{\alpha k^*} \left[1 - e^{(\zeta_{k^*} - Z^*) \alpha k^*} \right] +$$

$$\theta_{w,k^*}^s (\zeta_{k^*+1} - Z^*) + \sum_{k=k^*+2}^{k^\Delta} \theta_{w,k-1}^s (\zeta_k - \zeta_{k-1}) + \theta_{w,k^\Delta}^s (Z^* + \Delta Z - \zeta_{k^\Delta})$$

În situația când pânza freatică se află la adâncimea $Z^* + \Delta Z$, distribuția umidității pe profilul solului pe adâncimea $[Z_1 = 0, Z_2 = Z^* + \Delta Z]$ este reprezentată de relațiile (12), astfel încât rezerva de apă stocată, dată de relația (13), se prezintă astfel:

a) pentru modelul *van Genuchten-Mualem*,

$$W_{1-2}^\Delta = \sum_{k=1}^{k^\Delta-1} \theta_{w,k}^r (\zeta_{k+1} - \zeta_k) + \sum_{k=1}^{k^\Delta-1} (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \left[1 + (A_k (Z^* + \Delta Z - Z))^n \right]^{-mk} dZ + \quad (15-a)$$

$$\theta_{w,k^\Delta}^r (Z^* + \Delta Z - \zeta_{k^\Delta}) + (\theta_{w,k^\Delta}^s - \theta_{w,k^\Delta}^r) \int_{\zeta_{k^\Delta}}^{Z^* + \Delta Z} \left[1 + (A_{k^\Delta} (Z^* + \Delta Z - Z))^{n_{k^\Delta}} \right]^{-m_{k^\Delta}} dZ$$

b) pentru modelul *exponențial*,

$$W_{1-2}^\Delta = \sum_{k=1}^{k^\Delta-1} \theta_{w,k}^r (\zeta_{k+1} - \zeta_k) + \sum_{k=1}^{k^\Delta-1} (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) \frac{E_k}{\alpha_k} \left[e^{\alpha_k (\zeta_{k+1} - Z^* - \Delta Z)} - e^{\alpha_k (\zeta_k - Z^* - \Delta Z)} \right] + \quad (15-b)$$

$$\theta_{w,k^\Delta}^r (Z^* - \zeta_{k^\Delta}) + (\theta_{w,k^\Delta}^s - \theta_{w,k^\Delta}^r) \frac{E_{k^\Delta}}{\alpha_{k^\Delta}} \left[1 - e^{(\zeta_{k^\Delta} - Z^* - \Delta Z) \alpha_{k^\Delta}} \right]$$

Considerând expresiile (14) și (15), relația de definiție pentru **coeficientul de înmagazinare mediu** devine:

$$\bar{\mu} = \frac{W_{1-2}^0 - W_{1-2}^\Delta}{\Delta Z}. \quad (16)$$

În cazul modelului *van Genuchten-Mualem*, în general, coeficientul de înmagazinare mediu $\bar{\mu}$ va fi determinat numai prin metode numerice. Însă, în cazul modelului exponențial, pentru coeficientul $\bar{\mu}$ se poate obține efectiv o expresie analitică, dar care, în cazul general, este destul de complicată.

Conform recomandărilor din [1], coeficientul μ^* utilizează modelul *van Genuchten-Mualem*; în acest caz se poate accepta $k^\Delta = k^*$ - ceea ce conduce la următoarea formă particulară pentru coeficientul de înmagazinare local μ^* :

$$\mu^* = \mu^*(Z^*) = \sum_{k=1}^{k^*-1} (\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r) [f_k(\zeta_{k+1}) - f_k(\zeta_k)] + (\theta_{w,k^*}^s - \theta_{w,k^*}^r) [1 - f_{k^*}(\zeta_{k^*})] \quad (17)$$

$$\text{unde } f_k(Z) = \left[1 + (A_k (Z^* - Z))^n \right]^{-m_k}. \quad (18)$$

REZULTATE ȘI DISCUȚII

În continuare, prezentăm pe baza ecuației (18) deduse anterior, un exemplu practic pentru cazul când: $N = 5, k^* = 2, k^\Delta = 4$:

- pentru coeficientul de înmagazinare mediu:

$$\bar{\mu} = \delta_1 \frac{E_1}{\alpha_1} [\varphi_1(\zeta_2) - \varphi_1(\zeta_1)] (1 - \lambda_1) + \delta_2 \left\{ (\zeta_3 - Z^*) + \frac{E_2}{\alpha_2} [1 + (\lambda_2 - 1) \varphi_2(\zeta_2) - \lambda_2 \varphi_2(\zeta_3)] \right\} + \quad (19)$$

$$\delta_3 \left\{ (\zeta_4 - \zeta_3) - \frac{E_3}{\alpha_3} \lambda_3 [\varphi_3(\zeta_4) - \varphi_3(\zeta_3)] \right\} + \delta_4 \left\{ (Z^* - \zeta_4) - \frac{E_4}{\alpha_4} [1 - \lambda_4 \varphi_4(\zeta_4)] \right\} + \theta_{w,4}^s$$

unde au fost introduse următoarele notații:

$$\delta_k = \frac{\theta_{w,k}^s - \theta_{w,k}^r}{\Delta Z}, \quad \varphi_k(\zeta) = e^{\alpha_k (\zeta - Z^*)}, \quad \lambda_k = e^{-\alpha_k \Delta Z} \quad (20)$$

În mod similar, relația (18) pentru **coeficientul de înmagazinare (local)** μ^* , se particularizată astfel:

$$\mu^* = \mu^*(Z^*) = (\theta_{w,1}^s - \theta_{w,1}^r) [f_1(\zeta_2) - f_1(\zeta_1)] + (\theta_{w,2}^s - \theta_{w,2}^r) [1 - f_2(\zeta_2)] \quad (21)$$

CONCLUZII

Utilizând o lege adecvată pentru distribuția sucțiunii pe profilul solului și modele parametrice pentru curba de sucțiune-umiditate sunt deduse expresii analitice pentru coeficienți de înmagazinare mediu și local ai unui sol structurat pe orizonturi, cu pânza de apă freatică la adâncime relativ mică. Rezultatele teoretice sunt aplicate pentru un studiu de caz, fiind astfel evaluate și erorile introduse de utilizarea în practică a formulelor propuse pentru coeficienții de înmagazinare.

BIBLIOGRAFIE

1. Chiorescu, E.I., 2008 – *Equations for alluvial soil's storage coefficients*, Environmental Engineering and Management Journal, nr. 6.
2. Kabat, Ir. P., 1988 – *Physics of Soil Moisture*, 27 th International course of land. Drainage. Wageningen, The Netherlands.